



Prof. Dr. Rupert Frank
Charlotte Dietze
Leonard Wetzel

ANALYSIS EINER VARIABLEN
ÜBUNGSBLATT 3 - LÖSUNGEN

WS 2021/22
12. November 2021

Definition. Zwei Mengen A, B heißen *gleichmächtig* (in Formeln: $|A| = |B|$), wenn es eine bijektive Abbildung $f: A \rightarrow B$ gibt.

Aufgabe 1 (2+2+3+3 Punkte). Zeigen Sie jeweils, dass folgende Mengen gleichmächtig sind:

- (i) $\mathbb{R}$ und $(-1, 1)$,
- (ii) $(-1, 1)$ und (a, b) für beliebige $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$,
- (iii) $(-1, 1)$ und $[-1, 1]$,
- (iv) $\mathbb{R}$ und $[0, \infty)$.

Aufgabe 2 (10 Punkte). Eine Menge M heißt *endlich*, falls es $n \in \mathbb{N}$ und eine bijektive Abbildung $f: M \rightarrow \{1, \dots, n\}$ gibt.

Zeigen Sie: Die Zahl n ist eindeutig bestimmt, das heißt falls es $n, m \in \mathbb{N}$ und bijektive Abbildungen $f: M \rightarrow \{1, \dots, n\}$ und $g: M \rightarrow \{1, \dots, m\}$ gibt, so folgt $n = m$.

Dies rechtfertigt die Definition $\#M := n$ für die Anzahl der Elemente einer Menge.

Lösung. Seien $n, m \in \mathbb{N}$, sowie $f: M \rightarrow \{1, \dots, n\}$ und $g: M \rightarrow \{1, \dots, m\}$ bijektiv. Dann ist $h := f \circ g^{-1}: \{1, \dots, m\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$ ebenfalls bijektiv. Wir zeigen nun folgendes Lemma, woraus dann die Behauptung folgt.

Lemma (Schubfachprinzip). *Sei $n \in \mathbb{N}$. Setze $[n] := \{1, \dots, n\}$. Falls $f: [n] \rightarrow [n]$ injektiv ist, so ist f auch surjektiv.*

Man bemerke, dass das Lemma intuitiv absolut klar ist: Wenn man n Objekte auf n verschiedene Fächer verteilen will, so muss man in jedes Fach ein Objekt legen und kann keines auslassen. Nichtsdestrotz benötigt die Aussage einen rigorosen Beweis.

Beweis des Lemmas. Wir beweisen das Lemma mit Induktion über $n \in \mathbb{N}$.

Induktionsanfang: Für $n = 1$ ist $[1] = \{1\}$. Die einzige Funktion $f: [1] \rightarrow [1]$ ist gegeben durch $f(1) = 1$ und diese ist offensichtlich injektiv und surjektiv.

Induktionsschritt: Angenommen, für ein $n \in \mathbb{N}$ gilt, dass jedes injektive $f: [n] \rightarrow [n]$ auch surjektiv ist (Induktionsvoraussetzung). Wir zeigen, dass dies auch für jede Funktion $[n+1] \rightarrow [n+1]$ gilt.

Sei $f: [n+1] \rightarrow [n+1]$ injektiv. Wir unterscheiden zwei Fälle:

- Fall 1: $f(k) \neq n+1$ für alle $k \in [n]$. Dann ist die Einschränkung von f auf die Menge $[n]$ eine Abbildung $[n] \rightarrow [n]$ und ebenfalls injektiv, da f injektiv ist. Nach Induktionsvoraussetzung ist die Einschränkung von f auf $[n]$ surjektiv. Daraus folgt $f(n+1) \notin [n]$ (sonst wäre f nicht injektiv), also $f(n+1) = n+1$ und f ist surjektiv.
- Fall 2: $f(k) = n+1$ für ein $k \in [n]$. Da f injektiv ist, ist k eindeutig bestimmt. Definiere $g: [n+1] \rightarrow [n+1]$,

$$g(m) := \begin{cases} f(n+1) & m = k, \\ n+1 & m = n+1 \\ f(m) & m \neq k, m \neq n+1 \end{cases}.$$

Dann ist g injektiv und für alle $k \in [n]$ ist $g(k) \neq n+1$ nach Konstruktion. Also lässt sich Fall 1 auf g anwenden, woraus folgt, dass g surjektiv ist und damit auch f .

□

Kehren wir zum Beweis unserer Aussage zurück. Angenommen, $m \neq n$. Wir können ohne Einschränkung $m > n$ annehmen, sonst vertauschen wir die Rollen von m und n . Die Einschränkung $\tilde{h}$ der Abbildung h auf $[n]$ ist eine Abbildung $[n] \rightarrow [n]$ und injektiv, da h injektiv ist. Nach obigem Lemma folgt, dass $\tilde{h}$ surjektiv ist. Da $h(n+1) \in [n]$ folgt, dass es ein $k \in [n]$ gibt mit

$$h(k) = \tilde{h}(k) = h(n+1),$$

was ein Widerspruch zur Injektivität von h ist. Also muss $n = m$ gelten, wie behauptet.

□

Aufgabe 3 (2 + 4 + 4 Punkte). Zeigen Sie:

- (i) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist $\mathbb{N}^n$ gleichmächtig zu $\mathbb{N}$.

Hinweis: Sie dürfen die aus Lineare Algebra, Übungsblatt 3, Aufgabe 1b) bekannte Tatsache verwenden, dass $\mathbb{N}^2$ gleichmächtig zu $\mathbb{N}$ ist.

- (ii) Die Menge X aller endlichen Teilmengen von $\mathbb{N}$ ist abzählbar.

Hinweis: Für $k \in \mathbb{N}_0$ sei $N_{\leq k}$ die Menge aller Teilmengen von $\mathbb{N}$ mit höchstens k Elementen und bemerke, dass $X = \bigcup_{k \in \mathbb{N}_0} N_{\leq k}$.

- (iii) Die Potenzmenge $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ (Menge aller Teilmengen von $\mathbb{N}$) ist überabzählbar.

Hinweis: Für $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N})$ betrachte die Menge $M := \{x \in \mathbb{N} : x \notin f(x)\}$.

Lösung. (i) Wir führen den Beweis mittels Induktion über $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.

Induktionsanfang: $n = 2$: $\mathbb{N}^2$ ist gleichmächtig zu $\mathbb{N}$ nach dem Hinweis.

Induktionsschritt: Angenommen, $\mathbb{N}^n$ ist gleichmächtig zu $\mathbb{N}$ für ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 3$. Sei $g: \mathbb{N}^n \rightarrow \mathbb{N}$ die entsprechende bijektive Abbildung. Zudem sei $f: \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$ eine Bijektion, die wieder nach dem Hinweis existiert.

Wir definieren $h: \mathbb{N}^{n+1} \rightarrow \mathbb{N}$ durch

$$h(k_1, \dots, k_{n+1}) := f(g(k_1, \dots, k_n), k_{n+1})$$

für alle $(k_1, \dots, k_{n+1}) \in \mathbb{N}^{n+1}$. Bijektivität von h folgert man nun leicht aus der entsprechenden Eigenschaft von g bzw. f .

(ii) Für jedes $k \in \mathbb{N}_0$ sei $N_{\leq k}$ die Menge aller Teilmengen von $\mathbb{N}$ mit höchstens k Elementen. Wir behaupten, dass $N_{\leq k}$ für jedes $k \in \mathbb{N}$ abzählbar ist. Für $k = 0$ ist $N_{\leq 0} = \{\emptyset\}$, also ist $N_{\leq 0}$ endlich und damit abzählbar. Sei nun $k \in \mathbb{N}$. Definiere die Abbildung

$$f_k: \mathbb{N}^k \rightarrow N_{\leq k}, \quad f_k(n_1, \dots, n_k) := \{n_1, \dots, n_k\}.$$

Diese ist offensichtlich surjektiv. Zudem existiert nach Aufgabenteil (i) eine bijektive, also insbesondere surjektive Abbildung $g_k: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}^k$. Die Funktion

$$h_k := f_k \circ g_k: \mathbb{N} \rightarrow N_{\leq k}$$

ist als Verkettung surjektiver Funktionen surjektiv (bekannt aus linearer Algebra). Es folgt, dass $N_{\leq k}$ für jedes $k \in \mathbb{N}_0$ abzählbar ist. Wegen

$$X = \bigcup_{k \in \mathbb{N}_0} N_{\leq k}$$

ist X als abzählbare Vereinigung abzählbarer Mengen wieder abzählbar.

(ii) Angenommen, es gäbe eine surjektive Abbildung $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N})$. Wir definieren wie im Hinweis angedeutet die Menge

$$M := \{x \in \mathbb{N} : x \notin f(x)\}.$$

Nach Annahme gibt es ein $x \in \mathbb{N}$ mit $f(x) = M$. Nun gilt aber $x \in M \Leftrightarrow x \notin f(x) = M$, Widerspruch. Also gibt es keine solche Surjektion f und $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ ist überabzählbar. $\square$

Aufgabe 4 (3 + 7 Punkte). Gegeben sei die Menge

$$\alpha := 0^* \cup \{q \in \mathbb{Q} : q^2 < 2\},$$

wobei $r^* := \{q \in \mathbb{Q} : q < r\}$ für $r \in \mathbb{Q}$. Zeigen Sie:

- (i) α ist ein Dedekindscher Schnitt,
- (ii) $\alpha \cdot \alpha = 2^*$.

Man kann α also als Darstellung von $\sqrt{2}$ als Dedekindscher Schnitt auffassen.

Lösung. (i) Wir prüfen die drei definierenden Eigenschaften eines Dedekindschen Schnittes nach.

(a) $0 \in \alpha$, also $\alpha \neq \emptyset$ und $2 \notin \alpha$, also $\alpha \neq \mathbb{Q}$.

(b) Sei $p \in \alpha$ und $q \in \mathbb{Q}$ mit $q < p$. Falls $q < 0$, folgt sofort $q \in 0^* \subset \alpha$. Falls $0 \leq q < p$, so ist $0 \leq q^2 < p^2 < 2$, also wieder $q \in \alpha$.

(c) Sei $p \in \alpha$. Wir müssen zeigen, dass es ein $r \in \alpha$ gibt $r > p$. Falls $p \in 0^*$, so ist $p < 0$. Aus der Vorlesung wissen wir, dass es zwischen zwei verschiedenen reellen Zahlen immer

eine rationale Zahl gibt, also finden wir in diesem Fall $r \in \mathbb{Q}$ mit $p < r < 0$ und damit auch $r \in 0^* \subset \alpha$.

Nun zum Fall $p \geq 0$ mit $p^2 < 2$. Wir müssen ein $r \in \mathbb{Q}$ finden mit $p < r^2 < 2$. Dies wurde in der Vorlesung bereits getan (die letzte Behauptung vor dem Abschnitt Supremumseigenschaft): Die Zahl

$$r := \frac{2p+2}{p+2} \in \mathbb{Q}$$

liefert das Gewünschte.

(ii) Da $\alpha > 0^*$ (bezüglich der auf der Menge der Dedekindschen Schnitte definierten Ordnung) ist das Produkt $\alpha \cdot \alpha$ einfach gegeben durch

$$\alpha \cdot \alpha = \{p \in \mathbb{Q} : p \leq rs \text{ für ein } 0 < r \in \alpha \text{ und ein } 0 < s \in \alpha\}.$$

Wir zeigen die beiden Inklusionen $\alpha \cdot \alpha \subseteq 2^*$ und $\alpha \cdot \alpha \supseteq 2^*$.

" $\subseteq$ ": Sei $p \in \alpha \cdot \alpha$. Dann existieren $0 < r, s \in \alpha$ mit $p \leq rs$. Daraus folgt

$$p^2 \leq r^2 s^2 < 2 \cdot 2 = 4,$$

also $p < 2$ und somit $p \in 2^*$.

" $\supseteq$ ": Sei $p \in 2^*$. Ohne Einschränkung nehmen wir an, dass $p > 1$, sonst wähle $r := s := 1$, wofür $0 < r, s \in \alpha$ und $p \leq 1 = rs$ gilt. Aus $p < 2$ folgt $\frac{2}{p} > 1$, also können wir mit dem archimedischen Axiom ein $n \in \mathbb{N}$ finden mit

$$1 + \frac{1}{n} < \frac{2}{p}.$$

Definiere

$$m := \max \left\{ k \in \mathbb{N} : \frac{k^2}{n^2} < 2 \right\}.$$

Dieses Maximum ist wohldefiniert, da jede nichtleere, beschränkte Menge natürlicher Zahlen ein Maximum besitzt (Übungsaufgabe, leichte Induktion). Dann gilt nach Definition von m

$$\frac{m^2}{n^2} < 2 \tag{1}$$

sowie

$$\frac{(m+1)^2}{n^2} \geq 2. \tag{2}$$

Weiter ist $m \geq n$ und damit erfüllt m ebenfalls

$$1 + \frac{1}{m} \leq 1 + \frac{1}{n} < \frac{2}{p}. \tag{3}$$

Wir setzen nun $r := \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$, $s := p \cdot \frac{n}{m} \in \mathbb{Q}$. Dann gilt offensichtlich $r, s > 0$, $p = r \cdot s$ und $r^2 < 2$ folgt sofort aus (1). Es verbleibt zu zeigen, dass $s^2 < 2$. Dazu schätzen wir ab:

$$s^2 = p^2 \frac{n^2}{m^2} = p^2 \frac{(m+1)^2}{m^2} \frac{n^2}{(m+1)^2} \stackrel{(2)}{\leq} p^2 \left(\frac{m+1}{m} \right)^2 \frac{1}{2} \stackrel{(3)}{<} p^2 \frac{4}{p^2} \frac{1}{2} = 2.$$

Es folgt $p \in \alpha \cdot \alpha$, was zu zeigen war. □

1) Zeigen Sie jeweils, dass folgende Mengen gleichmächtig sind.

(i) $\mathbb{R}$ und $(-1, 1)$

Beweis:

Definiere

$$f: \mathbb{R} \rightarrow (-1, 1), \quad f(x) := \frac{x}{1+|x|}$$

f ist wohldefiniert:

Sei $x \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$|f(x)| = \left| \frac{x}{1+|x|} \right| = \frac{|x|}{1+|x|} < 1$$

Also ist $f(x) \in (-1, 1)$.

Definiere $g: (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) := \frac{x}{1-|x|}$

$g \circ f = \text{id}_{\mathbb{R}}$:

Sei $x \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$g(f(x)) = \frac{f(x)}{1-|f(x)|} = \frac{\frac{x}{1+|x|}}{1-\left|\frac{x}{1+|x|}\right|} = \frac{x}{1+|x|-|x|} = x$$

$f \circ g = \text{id}_{(-1, 1)}$:

Sei $x \in (-1, 1)$. Dann gilt

$$f(g(x)) = \frac{g(x)}{1+|g(x)|} = \frac{\frac{x}{1-|x|}}{1+\left|\frac{x}{1-|x|}\right|} = \frac{x}{1-|x|+|x|} = x.$$

Also ist $g = f^{-1}$ und folglich ist f bijektiv.

Daraus folgt, dass $\mathbb{R}$ und $(-1, 1)$ gleichmächtig sind.

(ii) $(-1, 1)$ und (a, b) für $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$

Beweis:

Definiere

$$f: (-1, 1) \rightarrow (a, b), \quad f(x) := \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} x$$

f ist wohldefiniert:

Sei $x \in (-1, 1)$. Dann ist

$$f(x) = \frac{a+b}{2} + \underbrace{\frac{b-a}{2}}_{>0} \underbrace{x}_{>-1} > \frac{a+b}{2} - \frac{b-a}{2} = a$$

und

$$f(x) = \frac{a+b}{2} + \underbrace{\frac{b-a}{2}}_{>0} \underbrace{x}_{<1} < \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} = b$$

Also $f(x) \in (a, b)$.

Definiere $g: (a, b) \rightarrow (-1, 1)$, $g(x) := \frac{x - \frac{a+b}{2}}{\frac{b-a}{2}}$

g ist wohldefiniert:

Sei $x \in (a, b)$. Dann gilt da $\frac{b-a}{2} > 0$ ist

$$g(x) = \frac{x - \frac{a+b}{2}}{\frac{b-a}{2}} \underset{\substack{\uparrow \\ x < b}}{<} \frac{b - \frac{a+b}{2}}{\frac{b-a}{2}} = \frac{\frac{b-a}{2}}{\frac{b-a}{2}} = 1$$

und

$$g(x) = \frac{x - \frac{a+b}{2}}{\frac{b-a}{2}} \underset{\substack{\uparrow \\ x > a}}{>} \frac{a - \frac{a+b}{2}}{\frac{b-a}{2}} = \frac{\frac{a-b}{2}}{\frac{b-a}{2}} = -1$$

also $g(x) \in (-1, 1)$.

$f \circ g = \text{id}_{(a,b)}$

Sei $x \in (a, b)$. Dann

$$f(g(x)) = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} \frac{x - \frac{a+b}{2}}{\frac{b-a}{2}} = x$$

$$g \circ f = \text{id}_{(-1,1)}$$

Sei $x \in (-1,1)$. Dann ist

$$g(f(x)) = \frac{\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}x - \frac{a+b}{2}}{\frac{b-a}{2}} = x.$$

Also ist $g = f^{-1}$ und folglich ist f bijektiv. Insbesondere sind $(-1,1)$ und (a,b) gleichmächtig.

(iii) $(-1,1)$ und $[-1,1]$

Beweis:

Definiere $f: (-1,1) \rightarrow [-1,1]$ durch

$$f(x) = \begin{cases} -1 & , \text{ wenn } x = \frac{1}{2} \\ 1 & , \text{ wenn } x = \frac{1}{3} \\ \frac{1}{n-2} & , \text{ wenn } x = \frac{1}{n} \text{ für ein } n \in \mathbb{N} \setminus \{1,2,3\} \\ x & , \text{ sonst} \end{cases}$$

Bemerke, dass f wohldefiniert ist. Definiere $g: [-1,1] \rightarrow (-1,1)$ durch

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & , \text{ wenn } x = -1 \\ \frac{1}{3} & , \text{ wenn } x = 1 \\ \frac{1}{n+2} & , \text{ wenn } x = \frac{1}{n} \text{ für ein } n \in \mathbb{N} \setminus \{1\} \\ x & , \text{ sonst} \end{cases}$$

Auch g ist wohldefiniert und man kann direkt nachrechnen, dass $f \circ g = \text{id}_{[-1,1]}$ und $g \circ f = \text{id}_{(-1,1)}$. Also ist f bijektiv und daher sind $(-1,1)$ und $[-1,1]$ gleichmächtig.

(iv) $\mathbb{R}$ und $[0, \infty)$

Beweis:

Wir beweisen, dass

① $(0, 1)$ und $(0, \infty)$ gleichmächtig sind

② $(0, \infty)$ und $[0, \infty)$ gleichmächtig sind

Wenn wir ① und ② gezeigt haben, folgt mit Teil (i), (ii) für $a=0$, $b=1$ und Aufgabe auf dem Tutoriumsblatt, dass $\mathbb{R}$ und $[0, \infty)$ gleichmächtig sind.

Beweis von ①:

Definiere $f: (0, 1) \rightarrow (0, \infty)$, $f(x) := \frac{1}{x} - 1$.

f ist wohldefiniert, da für alle $x \in (0, 1)$ gilt, dass

$$f(x) = \frac{1}{x} - 1 \underset{x < 1}{>} 1 - 1 = 0.$$

Definiere $g: (0, \infty) \rightarrow (0, 1)$, $g(x) := \frac{1}{x+1}$.

g ist wohldefiniert, denn für alle $x \in (0, \infty)$ gilt

$$g(x) = \frac{1}{x+1} \underset{x > 0}{<} 1 \quad \text{und} \quad g(x) = \frac{1}{x+1} > 0.$$

$g \circ f = \text{id}_{(0, 1)}$: Sei $x \in (0, 1)$. Dann gilt

$$g(f(x)) = \frac{1}{f(x)+1} = \frac{1}{\frac{1}{x} - 1 + 1} = x$$

$f \circ g = \text{id}_{(0, \infty)}$: Sei $x \in (0, \infty)$. Dann gilt

$$f(g(x)) = \frac{1}{\frac{1}{x+1}} - 1 = x+1 - 1 = x.$$

Also ist $g = f^{-1}$, d.h. f ist bijektiv und folglich sind $(0, 1)$ und $(0, \infty)$ gleichmächtig.

Beweis von ②:

Definiere $f: (0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ durch

$$f(x) := \begin{cases} 0 & , x = 1 \\ \frac{1}{n-1} & , x = \frac{1}{n} \text{ für ein } n \in \mathbb{N} \setminus \{1\} \\ x & , \text{sonst} \end{cases}$$

Man kann zeigen, dass f bijektiv ist.

Definiere $g: [0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ durch

$$g(x) := \begin{cases} 1 & , x = 0 \\ \frac{1}{n+1} & , x = \frac{1}{n} \text{ für ein } n \in \mathbb{N} \\ x & , \text{sonst} \end{cases}$$

Man kann durch Fallunterscheidung nachrechnen, dass f, g wohldefiniert sind und $f \circ g = \text{id}_{[0, \infty)}$, $g \circ f = \text{id}_{(0, \infty)}$. Also ist f bijektiv und $(0, \infty)$ und $[0, \infty)$ sind gleichmächtig.

△

□